DER FINAL-ZUSTAND

EINES

RECHTWINKLICHEN HOMOGENEN PARALLELEPIPEDONS,

DAS

AN ALLEN PUNKTEN SEINER OBERFLÄCHE BEI BELIEBIGEN VON DER ZEIT UNABHÄNGIGEN TEMPERATUREN ERHALTEN WIRD.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT VON

CARL GOTTLOB HEINZE,

DR. PHIL.

BERLIN,
BUCHDRUCKEREI VON A. W. SCHADE
(L. SCHADE).
1870.

Betrachtet man die Vertheilung der Wärme im Innern des Parallelepipedons zunächst noch als von der Zeit abhängig, so wird die Temperatur u irgend eines Punktes m, dessen Koordinaten x, y, z sind, ausgedrückt sein durch

$$u = f(x, y, z, t).$$

Legt man durch m neue, zu den ersteren parallele Koordinaten, dx, dy, dz, so hat man nach dem Principe, auf das die Wärmetheorie gegründet ist, nämlich, daſs die Erwärmung dem Unterschiede der Temperatur proportional wirkt, für die Wärme, welche durch das untere Rechteck des unendlich kleinen Parallelepipedons dx, dy, dz während der unendlich kleinen Zeit dt geht, wenn k die Leitungsfähigkeit der Masse bezeichnet

$$-k \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{du}{dz}\, dt.$$

Nach demselben Principe hat man für die Wärme, welche durch die obere, der Fläche dx, dy entgegengesetzte, Fläche geht, indem man in dem erhaltenen Ausdrucke nur $z + dz$ statt z zu setzen braucht

$$-k \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \frac{du}{dz}\, dt - k\, dx\, dy\, \frac{d\frac{du}{dz}}{dz}\, dz \,.\, dt.$$

Auf gleiche Weise erhält man in Bezug auf die Flächen $dx \,.\, dz$, $dy \,.\, dz$ und ihre ihnen gegenüberliegenden

$$-k\, dx\, dy\, \frac{du}{dy}\, dt,$$

$$-k\, dx\, dz\, \frac{du}{dy}\, dt - k\, dx\, dz\, \frac{d\frac{du}{dz}}{dy}\, dy\, dt,$$

und

$$-k\,dy\,dz\,\frac{du}{dx}\,dt,$$

$$-k\,dy\,dz\,\frac{du}{dx}\,dt - k\,dy\,dz\,\frac{d\frac{du}{dx}}{dx}\,dx\,dt.$$

Nimmt man nun die Summe der Wärmemenge, welche das unendlich kleine Parallelepipedon empfängt, und zieht davon die Wärmemengen, welche es ausschickt, ab, so erhält man die Wärmemenge, welche sich während der unendlich kleinen Zeit dt anhäuft. Sie ist demnach

$$k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)dx\,.\,dy\,.\,dz\,.\,dt.$$

Ist nun D die Dichtigkeit der homogenen Masse, W die specifische Wärme, so drückt das Produkt $WD\,dx\,dy\,dz$ die Wärmemenge aus, welche nöthig ist, um das Parallelepipedon $dx\,dy\,dz$ von der Temperatur 0 auf die Temperatur 1 zu bringen. Dividirt man mit diesem Produkte obige Wärmemenge, so erhält man für den Wärmefluſs

$$\frac{du}{dt}=\frac{k}{WD}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Wird nun das Parallelepipedon in allen Punkten seiner Oberfläche von Temperaturen unterhalten, die von der Zeit unabhängig sind, so wird im Finalzustande, der nach unendlicher Zeit eingetreten ist, eine permanente Wärmevertheilung im Innern des Parallelepipedons stattfinden und daher die Bedingung

$$(1) \qquad 0=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}$$

zu erfüllen sein.

Es sei nun der Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z des Parallelepipedons in eine Ebene desselben gelegt, so daſs die drei zusammenstoſsenden Kanten, die

α, β, γ seien, mit ihnen zusammenfallen. Dadurch erhält man nachfolgende sechs Bedingungen:

$$x = 0,\ u = \varphi(y, z); \quad x = \alpha,\ u = \varphi_1(y, z);$$
$$y = 0,\ u = \psi(x, z); \quad y = \beta,\ u = \psi_1(x, z);$$
$$z = 0,\ u = \chi(x, y); \quad z = \gamma,\ u = \chi_1(x, y).$$

Man lasse nun $\varphi_2(y, z)$, $\psi_2(x, z)$, $\chi_2(x, y)$ solche Funktionen sein, dafs

$$\varphi_2(y, z) = \varphi_1(y, z) - \varphi(y, z),$$
$$\chi_2(x, z) = \chi_1(x, y) - \chi(x, z),$$
$$\psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) - \psi(x, y)$$

sei. Man lasse nun u aus sechs Theilen bestehen, von denen jeder der Bedingung (1) genügt, und zugleich einer der folgenden Bedingungen

$$x = 0,\ u = \varphi(y, z); \quad x = \alpha,\ u = \varphi_2(y, z);$$
$$y = 0,\ u = \psi(x, z); \quad y = \beta,\ u = \psi_2(x, z);$$
$$z = 0,\ u = \chi(x, y); \quad z = \gamma,\ u = \chi_2(x, y).$$

Sei daher zuerst

$$(a) \qquad 0 = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

$$(b) \quad \begin{array}{ll} x = 0,\ u = \varphi; & x = \alpha,\ u = 0; \\ y = 0,\ u = 0; & y = \beta,\ u = 0; \\ z = 0,\ u = 0; & z = \gamma,\ u = \chi_2(x, y) \end{array}$$

zu erfüllen.

Es genügt der (a)

$$u = e^{\lambda x + \mu y + \nu z}, \text{ wenn } \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0 \text{ ist,}$$

so dafs keine imaginären Werthe nöthig sind. Man sieht hieraus, dafs in Bezug auf x, y trigonometrische Funktionen, in Bezug auf z aber nur exponentielle sind. Sei nun $\lambda = \lambda i$, $\mu = \mu i$, und es genügt

$u = e^{(\lambda x + \mu y)i} e^{\nu z}$, wenn $-(\lambda^2 + \mu^2) + \nu^2 = 0$ ist,

und daher genügen

$$\cos \lambda x \,.\, \sin \mu y\, e^{\nu z},$$
$$\cos \lambda x \,.\, \cos \mu y\, e^{\nu z},$$
$$\sin \lambda x \,.\, \cos \mu y\, e^{\nu z},$$
$$\sin \lambda x \,.\, \sin \mu y\, e^{\nu z}.$$

Von diesen Auflösungen ist nun, damit die Funktion 0 werde, für $x = 0$ und $y = 0$, die Auflösung

$$\sin \lambda x \,.\, \sin \mu y \, e^{\nu z}, \quad \nu^2 - (\lambda^2 + \mu^2) = 0$$

zu nehmen. Die gebrauchte Funktion wird aber noch nicht 0 für $z = 0$. Da nun auch

$$-\sin \lambda x \sin \mu y \, e^{-\nu z}, \text{ wenn } \nu = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \text{ ist,}$$

genügt, so genügt auch die Summe

$$\sin \lambda x \sin \mu y \, (e^{\nu z} - e^{-\nu z})$$

und diese Funktion wird auch 0 für $z = 0$.

Man hat daher die Partikularauflösung

$$\sin \lambda x \sin \mu y \, (e^{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, z} - e^{-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, z}),$$

welche nun auch den Bedingungen genügen soll, dafs sie 0 wird für $x = \alpha$ und $y = \beta$. Zu diesem Zwecke setze man

$$\lambda_\alpha = l_\pi, \quad \mu\beta = m_\pi,$$

$$\lambda = \frac{l_\pi}{\alpha}, \quad \mu = \frac{m_\pi}{\beta},$$

wodurch man

$$\sin \frac{l_\pi}{\alpha} x \,.\, \sin \frac{m_\pi}{\beta} y \left(e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} \right)$$

erhält, worin die beiden beliebigen Konstanten l, m man blofs positiv zu nehmen braucht, da negativ genommen sie das Resultat nicht ändern.

Um aus dieser Partikularauflösung das allgemeine Integral zu erhalten, hat man sie mit einer beliebigen Konstante $a_{l,m}$, wo l und m alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen, zu multipliciren und dann die Summe zu nehmen. Man erhält daher

$$\Sigma\Sigma\, a_{l,m} \sin \frac{l_\pi}{\alpha} x \sin \frac{m_\pi}{\beta} y \left(e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} \right)$$

in welchem Ausdrucke, der eine Sinusreihe mit doppeltem Eingange ist, noch die Bedingung zu erfüllen bleibt, dafs er für $z = \gamma$ die gegebene Funktion $\chi_2(x, y)$ werde.

Nach einem Verfahren, das unten näher angegeben werden soll, ist

$$\chi_2(x, y) =$$

$$\frac{4}{\alpha . \beta} \Sigma\Sigma \sin \frac{l\pi}{\alpha} x \sin \frac{m\pi}{\beta} y \left(\frac{e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}}{e^{\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}} \right)$$

$$x \int_0^\alpha \int_0^\beta d\lambda \, d\mu \, \chi_2(\lambda, \mu) \sin \frac{l\pi}{\alpha} \lambda \sin \frac{m\pi}{\beta} \mu .$$

Es genügt daher obiger Ausdruck

$$\Sigma\Sigma a_{l,m} \sin \frac{l\pi}{\alpha} x \sin \frac{m\pi}{\beta} y \left(e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} \right)$$

wenn

$$a_{l,m} = \frac{4}{\alpha\beta} \frac{\int_0^\alpha \int_0^\beta d\lambda \, d\mu \, \chi_2(\lambda, \mu) \sin \frac{l\pi}{\alpha} \lambda \sin \frac{m\pi}{\beta} \mu}{e^{\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}} - e^{-\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}} .$$

Sei nun zweitens der Theil zu finden, der den folgenden Bedingungen genügt

(1) $$0 = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

(2) $$x = 0, \; u = 0; \quad x = \alpha, \; u = 0;$$
$$y = 0, \; u = 0; \quad x = \beta, \; u = 0;$$
$$z = 0, \; u = \chi(x, y).$$

Man nehme wiederum als Partikularauflösung

$$\sin \lambda x \sin \mu y \, e^{\nu z}$$

oder

$$\sin \frac{l\pi}{\alpha} x \sin \frac{m\pi}{\beta} y \, e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}},$$

welche letztere schon den vier ersten Bedingungen unter (2) genügt. Multiplicirt man sie mit der beliebigen Konstante $b_{l,m}$, wo l, m alle Werthe zwischen 0 und ∞ annimmt, und summirt, so erhält man als allgemeines

Integral

$$\Sigma\Sigma\, b_{l,m} \sin\frac{l\pi}{\alpha}x \sin\frac{m\pi}{\beta}y\, e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}},$$

das nun noch die Bedingung zu erfüllen hat, daſs es für $z=0$ sich auf die gegebene Funktion $\chi(x,y)$ reducire.

Nach derselben Formel, die bei dem ersten Theile angewandt wurde, hat man

$$\chi(x,y) = \frac{4}{\alpha\,.\,\beta}\,\Sigma\Sigma \sin\frac{l\pi}{\alpha}x \sin\frac{m\pi}{\beta}y \int_0^\alpha\int_0^\beta d\lambda\, d\mu\, \chi(l,m) \sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda \sin\frac{m\pi}{\beta}\mu;$$

daher genügt obiger Ausdruck

$$\Sigma\Sigma\, b_{l,m} \sin\frac{l\pi}{\alpha}x \sin\frac{m\pi}{\beta}y,$$

wenn

$$b_{l,m} = \frac{4}{\alpha\beta}\int_0^\alpha\int_0^\beta \chi(\lambda,\mu) \sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda \sin\frac{m\pi}{\beta}\mu\, d\lambda\,.\,d\mu$$

gesetzt wird.

In Bezug auf die Funktionen $\psi_2(x,z)$, $\psi(x,z)$ und $\varphi_2(y,z)$, $\varphi(y,z)$ für $y=\beta$, $y=0$ und $x=\alpha$, $x=0$ wiederholt sich offenbar dieselbe Rechnung. Führt man, wie m, μ in Bezug auf y eingeführt worden ist, n, ν in Bezug auf z ein, so braucht man nur, um diese Funktionen zu erhalten, y, z mit z, y und dann in dem dadurch erhaltenen Ausdrucke x, y mit y, x zu vertauschen. Auf diese Weise erhält man

$$\psi_2(x,z) = \Sigma\Sigma\, a_{l,m} \sin\frac{l\pi}{\alpha}x \sin\frac{n\pi}{\gamma}z \left(e^{\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}} - e^{-\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}\right)$$

$$a_{l,n} = \frac{4}{\alpha\gamma}\int_0^\alpha\int_0^\gamma \psi_2(\lambda,\nu) \sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda \sin\frac{n\pi}{\gamma}\nu\, d\lambda\, d\nu \Big/ \left(e^{\beta\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}} - e^{-\beta\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}\right)$$

$$\psi(x,z) = \Sigma\Sigma\, b_{l,n} \sin\frac{l\pi}{\alpha}\, x \sin\frac{n\pi}{\gamma}\, z$$

$$b_{l,n} = \frac{4}{\alpha\gamma}\int_0^{\alpha}\int_0^{\gamma} \psi(\lambda,\nu) \sin\frac{l\pi}{\alpha}\,\lambda \sin\frac{n\pi}{\gamma}\,\nu\, d\lambda\, d\nu$$

und

$$\varphi_2(y,z) = \Sigma\Sigma\, a_{m,n} \sin\frac{m\pi}{\beta}\, y \sin\frac{n\pi}{\gamma}\, z$$

$$a_{m,n} = \frac{4}{\beta\gamma}\int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} \varphi_2(\mu,\nu) \sin\frac{m\pi}{\beta}\,\mu \sin\frac{n\pi}{\gamma}\,\nu \,.\, d\mu \,.\, d\nu \Big/ \left(e^{\alpha\pi\sqrt{\frac{m^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}} - e^{-\alpha\pi\sqrt{\frac{m^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}\right)$$

$$\varphi(y,z) = \Sigma\Sigma\, b_{m,n} \sin\frac{m\pi}{\beta}\, y \sin\frac{n\pi}{\gamma}\, z$$

$$b_{m,n} = \frac{4}{\beta\gamma}\int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} \varphi(\mu,\nu) \sin\frac{m\pi}{\beta}\,\mu \sin\frac{n\pi}{\gamma}\,\nu\, d\mu \,.\, d\nu.$$

Addirt man nun die erhaltenen sechs Ausdrücke und setzt man die Werthe von $a_{l,m}$, $b_{l,m}$, $a_{l,n}$, $b_{l,n}$, $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ ein, so erhält man die Wärmevertheilung $u = f(x,y,z)$, welche im Innern des Parallelepipedons stattfindet, und die den sechs gegebenen Bedingungen an den Seitenflächen entspricht.

Nämlich

$$u = \frac{4}{\beta\gamma}\Sigma\Sigma \sin\frac{m\pi}{\beta}\, y \sin\frac{n\pi}{\gamma}\, z \int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} \varphi(\mu,\nu) \sin\frac{m\pi}{\beta}\,\mu \sin\frac{n\pi}{\gamma}\,\nu\, d\mu \,.\, d\nu$$

$$+ \frac{4}{\beta\gamma}\Sigma\Sigma \sin\frac{m\pi}{\gamma}\, y \sin\frac{n\pi}{\gamma}\, z \frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{m^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}} - e^{-x\pi\sqrt{\frac{m^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}}{e^{\alpha\pi\sqrt{\frac{m^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}} - e^{-\alpha\pi\sqrt{\frac{m^2}{\gamma^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}} \times \int_0^{\beta}\int_0^{\gamma} \varphi(\mu,\nu) \sin\frac{m\pi}{\beta}\,\mu \sin\frac{n\pi}{\gamma}\,\nu\, d\mu \,.\, d\nu$$

$$+\frac{4}{\alpha\gamma}\Sigma\Sigma\sin\frac{l\pi}{\alpha}x\sin\frac{n\pi}{\gamma}z\int_0^\alpha\int_0^\gamma\psi(\lambda,\nu)\sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda$$

$$\sin\frac{m\pi}{\gamma}\nu\,d\lambda\,d\nu$$

$$+\frac{4}{\alpha\gamma}\Sigma\Sigma\sin\frac{l\pi}{\alpha}x\sin\frac{n\pi}{\gamma}z\,\frac{e^{y\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}-e^{-y\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}}{e^{\beta\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\nu^2}}}-e^{-\beta\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{n^2}{\gamma^2}}}}$$

$$\int_0^\alpha\int_0^\gamma\psi_2(\lambda,\nu)\sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda\sin\frac{n\pi}{\gamma}\nu\,d\lambda\,d\nu$$

$$+\frac{4}{\alpha\beta}\Sigma\Sigma\sin\frac{l\pi}{\alpha}x\sin\frac{m\pi}{\beta}y$$

$$\int_0^\alpha\int_0^\beta\chi(\lambda,\mu)\sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda\sin\frac{m\pi}{\beta}\mu\,d\lambda\,d\mu$$

$$+\frac{4}{\alpha\beta}\Sigma\Sigma\sin\frac{l\pi}{\alpha}x\sin\frac{m\pi}{\beta}y\,\frac{e^{z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}-e^{-z\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}}{e^{\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}-e^{-\gamma\pi\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}}$$

$$\int_0^\alpha\int_0^\beta\chi_2(\lambda,\mu)\sin\frac{l\pi}{\alpha}\lambda\sin\frac{m\pi}{\beta}\mu\,d\lambda\,.\,d\mu.$$

Es wurde oben angenommen, dafs eine Funktion $f(x)$ durch eine Sinusreihe, deren Koefficienten bestimmte Integrale wären, dargestellt werden könne. Lagrange fand die Formel dafür in Bezug auf Interpolationen. Er nahm y als eine periodische Funktion von x an, dargestellt durch

(1) $y = a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \ldots + a_n\sin n$

wo jeder Koefficient a_l von x unabhängig sei, und bestimmte dann die Koefficienten a_l dergestalt, dafs $y = f(x)$ wurde, wo $f(x)$ eine andere beliebige Funktion von x bedeutete für die folgenden n gleich weit von einander abstehenden Werthe von x

$$(2) \quad x = \frac{\pi}{n+1}, \quad x = \frac{2\pi}{n+1}, \quad x = \frac{3\pi}{n+1}, \ldots$$
$$x = \frac{n\pi}{n+1},$$

die alle zwischen 0 und π liegen. Er bestimmte auf diese Weise, dafs die Kurve, welche in (1) enthalten ist, mit der Kurve $y = f(x)$ in den n Punkten zusammenfalle, die den durch (2) gegebenen Abscissen entsprechen. Daher hat man, wenn die Ordinaten, welche diesen Abscissen entsprechen, $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ sind, folgende Bedingungsgleichungen

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi}{n+1} + a_2 \sin \frac{2\pi}{n+1} + \ldots$$
$$+ a_n \sin \frac{n\pi}{n+1}$$

$$(3) \quad y_2 = a_1 \sin \frac{2\pi}{n+1} + a_2 \sin \frac{4\pi}{n+1} + \ldots$$
$$+ a_n \sin \frac{2n\pi}{n+1}$$

$$y_n = a_1 \sin \frac{n\pi}{n+1} + a_2 \sin \frac{2n\pi}{n+1} + \ldots$$
$$+ a_n \sin \frac{n^2\pi}{n+1}$$

Multiplicirt man sie respektive mit

$$(4) \quad 2 \sin \frac{l\pi}{n+1}, \quad 2 \sin \frac{2l\pi}{n+1}, \ldots \quad 2 \sin \frac{nl\pi}{n+1}$$

und nimmt ihre Summe, so ist der Koefficient von a_k

$$2 \sin \frac{l\pi}{n+1} \sin \frac{k\pi}{n+1} + 2 \sin \frac{2l\pi}{n+1} \sin \frac{2k\pi}{n+1} + \ldots$$
$$+ 2 \sin \frac{nl\pi}{n+1} \sin \frac{nk\pi}{n+1}.$$

Nach der Formel

$$2 \sin nl \sin nk = \cos n(k-l) - \cos n(k+l)$$

erhält man hierfür die Differenz zweier Summen

$$S_1 = 1 + \cos\frac{(k-l)\pi}{n+1} + \cos\frac{2(k-l)\pi}{n+1} + \cdots + \cos\frac{n(k-l)\pi}{n+1}$$

$$(a)\quad S_2 = 1 + \cos\frac{(k+l)\pi}{n+1} + \cos\frac{2(k+l)\pi}{n+1} + \cdots + \cos\frac{n(k+l)\pi}{n+1}.$$

Setzt man vorläufig

$$S = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+n\beta)$$

$$2\cos\beta\, S = 2\cos\beta\cos\alpha + 2\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cdots + 2\cos\beta\cos(\alpha+n\beta),$$

woraus nach der Formel

$$\cos[\alpha+(n-1)\beta] + \cos[\alpha+(n+1)\beta] = 2\cos\beta\cos(\alpha+n\beta)$$

$$2\cos\beta\, S = \cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha + 2S - \cos(\alpha+n\beta) + \cos[\alpha+(n+1)\beta],$$

wird, so erhält man

$$S = -\cos(\alpha-\beta) + \cos\alpha + \cos(\alpha+n\beta) - \cos[\alpha+(n+1)\beta],$$

und für $\alpha = 0$ wird

$$S = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos n\beta + \cos(n+1)\beta}{1-\cos\beta}\right).$$

Macht man nun $\beta = \dfrac{k \mp l}{n+1}\pi$, so ist

$$\cos(n+1)\beta = \pm 1,\quad \cos n\beta = \pm\cos\beta,$$

je nachdem $\dfrac{k \mp l}{n+1}\,\pi$ ein gerades oder ungerades Vielfache von π ist.

In beiden Fällen wird daher

$$\cos n\beta = \cos\beta\cos(n+1)\beta$$

und daher

$$S = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(n+1)\beta]$$

und folglich

$$(b) \qquad \begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2}[1 - \cos(k-l)\,\pi] \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}[1 - \cos(k+l)\,\pi]. \end{aligned}$$

So lange k und l von einander verschieden sind, sind die Zahlen $k - l$ und $k + l$ zugleich gerade und ungerade und $S_1 - S_2 = 0$, so dafs in der Summe der Gleichungen (3), die respektive mit den Faktoren (4) multiplicirt sind, alle Koefficienten verschwinden, nur a_l verschwindet nicht.

Für $k = l$ hat man aus (b) $S_2 = 0$; aber die Bestimmung S_1 aus (b) kann nicht gebraucht werden, weil die Gleichung aus

$$S = \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots$$

abgeleitet ist und in dieser α nicht 0 gesetzt werden darf. Dafür erhält man aber direkt aus (a)

$$S_1 = n + 1$$

Man hat daher zur Bestimmung des Werthes des Koefficienten a_l folgende Gleichung

$$a_l = \frac{2}{n+1}\left(y_1 \sin\frac{l\pi}{n+1}\right) + y_2 \sin\frac{2\,l\pi}{n+1} + \ldots + y_n \sin\frac{n\,l\pi}{n+1},$$

wo man für l successive die Werthe 1, 2, 3 . . . n zu setzen hat.

Je gröfser nun n ist, desto mehr Punkte hat die Kurve (1) mit der Kurve $y = f(x)$ in dem Intervalle der Abscissen $x = 0$ bis $x = \pi$ gemein, und endlich fallen die Kurven an der Grenze $n = \infty$ in allen Punkten innerhalb des genannten Intervalls mit einander zusammen. Dann verwandelt sich obige Summe in ein bestimmtes Integral von folgender einfacher Gestalt, wenn man

$$\frac{l\pi}{n+1} = \alpha, \qquad \frac{\pi}{n+1} = d\alpha, \quad y_1 = f(x)$$

setzt,

$$a_l = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin l\alpha\, f(x)\, d\alpha,$$

folglich ist

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\,\Sigma \sin l x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin l\alpha\, d\alpha.$$

Wenn man von einer solchen Voraussetzung ausgehen will, daſs $f(x)$ in eine Sinusreihe

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_l \sin lx$

entwickelbar sei, so kann man dasselbe Resultat auf einem weit leichteren Wege erhalten.

Man kann zunächst aus demselben Grunde setzen

$$f(\alpha) \sin l\alpha \,.\, d\alpha = a_1 \sin l\alpha \sin \alpha\, d\alpha + a_2 \sin l\alpha \sin 2\alpha\, d\alpha + \ldots + a l \sin {}^2 l\alpha\, d\alpha.$$

Fügt man nun die Bedingung hinzu, daſs obige Reihe zwischen den Grenzen von x, $x = 0$ und $x = \pi$ stattfinde, so kann man schreiben

$$\int_0^{\pi} f(a) \sin l\alpha \,.\, d\alpha = a_1 \int_0^{\pi} \sin l\alpha \sin \alpha\, d\alpha + a_2 \int_0^{\pi} \sin l\alpha \sin 2\alpha\, d\alpha \ldots + a l \int_0^{\pi} \sin {}^2 l\alpha\, d\alpha.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\pi} \sin l\alpha \sin l^1\alpha\, d\alpha = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos (l - l^1)\alpha\, d\alpha - \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos (l + l^1)\alpha\, d\alpha = \left[\frac{\sin (l - l^1)\alpha}{2(l - l^1)} - \frac{\sin (l + l^1)\alpha}{2(l + l^1)}\right]_0^{\pi},$$

welcher Ausdruck 0 ist, so lange l und l^1 von einander verschieden sind.

Für $l = l^1$ wird

$$\int_0^{\pi} \sin {}^2 l\alpha \,.\, d\alpha = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und daher erhält man

$$a_l = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin l\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha$$

und folglich

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\,\Sigma \sin lx \int_0^{\pi} \sin l\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Wenn hierin $x = \frac{\pi x}{a}$ und $\alpha = \frac{\pi \alpha}{a}$ gesetzt wird, erhält man

$$f(x) = \frac{2}{a}\,\Sigma \sin \frac{l\pi}{a}\, x \int_0^{a} \sin \frac{l\pi}{a}\, \alpha\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Da $f(x)$ ganz beliebig ist, so kann man setzen

$$f(x,y) = \frac{2}{a}\,\Sigma \sin \frac{l\pi}{a}\, x \int_0^{a} \sin \frac{l\pi}{a}\, \alpha\, f(x,y)\, d\alpha,$$

und entwickelt man nach dem oben angegebenen Verfahren $f(x, y)$ in eine Sinusreihe, nämlich

$$f(x,y) = \frac{2}{b}\,\Sigma \sin \frac{m\pi}{b}\, y \int_0^{b} \sin \frac{m\pi}{b}\, \beta f(\alpha,\beta)\, d\beta,$$

so erhält man durch Substitution

$$f(x,y) = \frac{4}{a\,b}\,\Sigma\Sigma \sin \frac{l\pi}{\alpha}\, x \sin \frac{m\pi}{b}\, y \int_0^{a}\int_0^{b} f(\alpha,\beta) \sin \frac{l\pi}{a}\, \alpha \sin \frac{m\pi}{b}\, \beta\, d\alpha\, d\beta,$$

welches diejenige Formel ist, welche oben angewandt wurde.

Es bleibt aber übrig zu zeigen, dafs diese Reihe convergent ist und sich wirklich der Grenze $f(x)$ nähert. Diesen sehr feinen Theil der Untersuchung verdankt die Mathematik Dirichlet, wodurch ihre Anwendung

auf physikalische Probleme erst festen Grund gewonnen hat.

Zunächst wurde das Integral

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta$$

untersucht, in welchem k eine positive Zahl sei, die immer gröfser und gröfser werde. Setzt man nun $\frac{1}{\varepsilon}$ statt k, wo nun ε eine positive Zahl bedeutet, die sich unendlich der 0 nähert, und setzt man $\vartheta = \frac{\beta}{\varepsilon}$, so wird

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\, d\beta = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon \sin \vartheta}{\sin \varepsilon\vartheta}\, d\vartheta. \qquad (\alpha)$$

In dem Falle, wo $\sin \varepsilon\vartheta$ nicht unendlich ist, nähert sich der Faktor $\frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon\vartheta}$ der 0, weil ε sich der 0 nähert, ist aber an der Grenze $\sin \varepsilon\vartheta$ unendlich klein, so ist der Werth desselben $\frac{1}{\vartheta}$ und man hat daher an der Grenze das folgende Integral

$$\int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta$$

zu betrachten.

Nun ist

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta = \pi,$$

$$\int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta = \int_{0}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta - \int_{0}^{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta. \qquad (\beta)$$

Sind daher μ und ν positive Zahlen und ist ε sehr klein, so nähern sich die beiden Integrale der Differenz (β) einzeln sich immer mehr dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ und also die Differenz selbst oder das in Rede stehende Integral immer mehr der 0, bis endlich an den Grenzen $k = \infty$ es genau 0 wird.

Ist $\mu = 0$, ν eine beliebig positive Zahl, dann erhält das Integral den Werth $\frac{\pi}{2}$.

Ist aber μ eine negative, ν eine positive Zahl, alsdann konvergirt das Integral gegen die Grenze π.

Nimmt man also an, daſs eine Funktion f innerhalb der Grenzen der Integration endlich bleibt und daſs den immer gröſser werdenden positiven Werthen von k immer kleiner werdende Werthe von ε entsprechen, so ist die Grenze, der sich das Integral

$$\int_{\mu}^{\nu} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} f(\varepsilon \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} d\vartheta \qquad (\gamma)$$

nähert, Null, wenn die Zahlen μ, ν von demselben Zeichen und von 0 verschieden sind. Wenn die Zahl μ Null ist, wird sie $\frac{1}{2}\pi f(0)$; und sind endlich die Zahlen μ und ν von verschiedenen Zeichen, so ist die Grenze $\pi f(0)$.

Nimmt man nun von der oben erhaltenen Funktion

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin lx \int_0^{\pi} \sin l\alpha \, f(\alpha) \, d\alpha$$

die l ersten Glieder, nämlich

$$s_l = \frac{2}{\pi} \left[\sin x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + \sin 2\alpha \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin 2x \, d\alpha + \ldots \right.$$
$$\left. + \sin l\alpha \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin l\alpha \, d\alpha \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha \,[2 \sin x \sin \alpha + 2 \sin 2x \sin 2\alpha + \ldots + 2 \sin lx \sin l\alpha]$$

oder, wenn man die Sinus in Kosinus umwandelt,

$$s_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha \begin{bmatrix} 1 + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \ldots \\ -(1 + \cos(x+\alpha) + \cos 2(x+\alpha) + \ldots \\ \qquad + \cos l(x-\alpha) \\ \qquad + \cos l(x+\alpha) \end{bmatrix},$$

so wird nach der schon gefundenen Formel

$$1 + \cos(x \pm \alpha) + \cos 2(x \pm \alpha) + \ldots + \cos l(x \pm \alpha)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{\cos l(x \pm \alpha) - \cos(l+1)(x \pm \alpha)}{1 - \cos(x \pm \alpha)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{\cos(l+\frac{1}{2})(x \pm \alpha) - \frac{1}{2}(x \pm \alpha) - \cos(l+\frac{1}{2})(x \pm \alpha) + \frac{1}{2}(x \pm \alpha)}{1 - \cos(x \pm \alpha)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{2 \sin(l+\frac{1}{2})(x \pm \alpha) \sin \frac{x \pm \alpha}{2}}{2 \sin\left(\frac{x \pm \alpha}{2}\right)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{1 + \frac{\sin(l+\frac{1}{2})\left(\frac{x \pm \alpha}{2}\right)}{\sin \frac{x \pm \alpha}{2}}\right\}$$

endlich

$$s_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \frac{\sin(l+\frac{1}{2})(x-\alpha)}{\sin\left(\frac{x \pm \alpha}{2}\right)}\, d\alpha$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \frac{\sin(l+\frac{1}{2})x+\alpha)}{\sin \frac{x+\alpha}{2}}\, d\alpha.$$

Im ersten Integrale $x - \alpha = 2\beta$ und im zweiten $x + \alpha = 2\beta$ gesetzt, giebt

$$s_l = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x-2\beta)\,\frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} f(2\beta-x)\,\frac{\sin 2l+1}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Fällt nun x zwischen 0 und π, so sind beide Grenzen des zweiten Integrals positiv, die Grenzen des ersten von verschiedenen Zeichen. Daher ist nach (γ) für $l=\infty$ das zweite Integral $=0$, und die Grenze des ersten Integrals, wenn $\beta=0$ gesetzt wird, $\frac{1}{\pi}\pi f(x)$. Folglich ist der erste Theil der Gleichung (c) eine konvergente Reihe, welche $f(x)$ zur Summe hat, unter der Bedingung, dafs x zwischen 0 und π enthalten ist.

An den Grenzen $x=0$, $x=\pi$ der Werthe von x hat man

$$s_l = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(-2\beta)\,\frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\beta)\,\frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = 0$$

und

$$s_l = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2\beta)\,\frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(2\beta-\pi)\,\frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - 2\beta) \frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta} d\beta$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - 2\beta) \frac{\sin(2l+1)\beta}{\sin\beta} d\beta = 0.$$